

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”***Ediția a XXVII-a***ETAPA LOCALĂ – 30 ianuarie 2026****Clasa a IX-a, profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2****BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE****Subiectul 1. ( 20 puncte)**

Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_n = 0, \underset{\text{ncifrede3}}{33}...3$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Verificați dacă numărul  $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$  este termen al șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

b) Arătați că pentru orice număr natural nenul  $n$ ,  $a_n$  este suma primilor  $n$  termeni ai unei progresii geometrice.

c) Arătați că  $a_n = \frac{10^n - 1}{3 \cdot 10^n}$ .

d) Calculați suma  $S = 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \dots + 10^{2026} \cdot a_{2026}$ .

**Soluție:** a)  $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 = 0,333 = a_3$ , prin urmare numărul  $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$  este al treilea termen al șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  .....**5p**

b) Șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $b_n = 3 \cdot \frac{1}{10^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este o progresie geometrică cu rația  $q = \frac{1}{10} = 0,1$  .....**2p**

$$b_1 = 3 \cdot \frac{1}{10} = 0,3; b_2 = 3 \cdot \frac{1}{10^2} = 0,03; b_3 = 3 \cdot \frac{1}{10^3} = 0,003; \dots$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0,3 + 0,03 + \dots + \underbrace{0,00\dots03}_{\text{ncifre}} = 0,33\dots3 = a_n \text{ .....} \mathbf{3p}$$

$$\text{c) } a_n = S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^n - 1}{3 \cdot 10^n} \text{ .....} \mathbf{5p}$$

$$\text{d) } S = 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \dots + 10^{2026} \cdot a_{2026} = \frac{10 + 10^2 + \dots + 10^{2026} - 2026}{3} = \frac{10^{2027} - 10}{27} - \frac{2026}{3} = \frac{10^{2027} - 18244}{27} \text{ .....} \mathbf{5p}$$

**Subiectul 2. ( 20 puncte)**

Calculați partea întreagă a numărului  $A = \left\{ \frac{2025}{2026} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2025}{2026} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2025}{2026} \right\} + \dots + \left\{ 2025 \cdot \frac{2025}{2026} \right\}$  unde  $\{x\}$

reprezintă partea fracționară a lui  $x$ .

*Etapa locală CMA\_H2 - Iași, 30 ianuarie 2026 – Barem de notare și evaluare*

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași

Tel: +40 (0)232 26 80 14

Fax: +40 (0)232 26 77 05

www.isjiasi.ro

**Soluție:**  $A = \left\{1 - \frac{1}{2026}\right\} + \left\{2 - \frac{2}{2026}\right\} + \left\{3 - \frac{3}{2026}\right\} + \dots + \left\{2025 - \frac{2025}{2026}\right\} \dots\dots\dots 4p$

$$A = \left\{-\frac{1}{2026}\right\} + \left\{-\frac{2}{2026}\right\} + \left\{-\frac{3}{2026}\right\} + \dots + \left\{-\frac{2025}{2026}\right\} \dots\dots\dots 4p$$

$$A = \left(-\frac{1}{2026} + 1\right) + \left(-\frac{2}{2026} + 1\right) + \dots + \left(-\frac{2025}{2026} + 1\right) \dots\dots\dots 4p$$

$$A = -\frac{2025}{2} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{2025} = \frac{2025}{2} \dots\dots\dots 4p$$

Partea întreagă a numărului  $A$  este  $[A] = \left[\frac{2025}{2}\right] = 1012 \dots\dots\dots 4p$

### Subiectul 3. ( 20 puncte)

Fie  $ABCD$  și  $DGFE$  două paralelograme.

a) Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , demonstrați că  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) Demonstrați că triunghiurile  $ACF$  și  $BEG$  au același centru de greutate.

**Soluție:**

a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \dots\dots\dots 10p$

b) Notăm cu  $G_1$  centrul de greutate al triunghiului  $ACF$  și cu  $G_2$  centrul de greutate al triunghiului  $BEG$ .

Avem  $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1F} = \vec{0}$  și  $\overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2E} + \overrightarrow{G_2G} = \vec{0} \dots\dots\dots 5p$

Scăzând cele două relații, obținem că  $3\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$ , deci  $G_1 = G_2 \dots\dots\dots 5p$

**Metodă alternativă:**

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{r_{G_2}} - \overrightarrow{r_{G_1}} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_G}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_F}}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$ABCD \text{ paralelogram} \Rightarrow \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D} \dots\dots\dots 2p$$

$$DGFE \text{ paralelogram} \Rightarrow \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_F} = \overrightarrow{r_G} + \overrightarrow{r_E} \dots\dots\dots 2p$$

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_C}) + (\overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_G} - \overrightarrow{r_F})}{3} = \frac{-\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_D}}{3} = \vec{0}, \text{ deci } G_1 = G_2 \dots\dots\dots 3p$$

### Subiectul 4. ( 30 puncte)

Pe un lac cresc anual foarte mulți nuferi. În prima zi a anului pe lac se află 2 nuferi, iar în fiecare din zilele următoare, numărul nuferilor crește cu 3 față de numărul nuferilor aflați pe lac în ziua precedentă.

*Etapa locală CMA\_H2 - Iași, 30 ianuarie 2026 – Barem de notare și evaluare*

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași

Tel: +40 (0)232 26 80 14

Fax: +40 (0)232 26 77 05

www.isjiasi.ro

- a) Demonstrați că numerele ce reprezintă nufării de pe lac în zilele 1, 3 și 11 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- b) Câți nuferi sunt pe lac în a 325-a zi a anului?
- c) Demonstrați că suma pătratelor numerelor ce reprezintă nufării din oricare două zile consecutive, nu poate fi pătrat perfect.

**Soluție:** a) Notând cu  $(a_n)_{n \geq 1}$  șirul numerelor ce reprezintă nufării care se află pe lac începând cu prima zi a anului ( $a_n$  reprezintă numărul nufărilor din ziua  $n$ ), avem  $a_1 = 2$ ,  $a_3 = 2 + 2 \cdot 3 = 8$ ,  $a_{11} = 2 + 10 \cdot 3 = 32$  .....5p  
 $a_3^2 = a_1 \cdot a_{11}$ , obținem că  $a_1, a_3, a_{11}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.....5p

b)  $a_1 = 2$  și  $a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Se demonstrează utilizând metoda inducției matematice sau se aplică formula termenului general al unei progresii aritmetice că  $a_n = 3n - 1$  .....5p  
 $a_{325} = 3 \cdot 325 - 1 = 974$  nuferi.....5p

c) Cum  $a_n^2 + a_{n+1}^2 = (3n - 1)^2 + (3n + 2)^2 = M_3 + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , obținem că  $a_n^2 + a_{n+1}^2$  nu poate fi pătrat perfect.....10p

**Se acordă 10 puncte din oficiu. Punctajul maxim este 100 puncte.**